Rozšíření MA1 pro biochemiky.
Funkce více proměnných - příklady 1.

---

1. Definiční obory funkcí více proměnných:
   Najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste definiční obory načrtnout.
   Pokuste se také rozhodnout, zda nalezený definiční obor funkce je množina otevřená, resp.uzavřená, omezená, co je hranicí zkoumaného definičního oboru.

$f(x,y)=x+\sqrt{y}$; $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$; $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$;
$f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$;
$f(x,y)=\ln(x+y)$; $f(x,y)=\ln(xy)$; $f(x,y)=\ln(xy-1)$; $f(x,y)=\sqrt{\ln(xy)}$;
$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\ln(xy)$; $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x+1}$;
$f(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$; $f(x,y,z)=\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}$; $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$;
$f(x,y,z)=\dfrac{1}{1-(x^2+y^2-z^2)}$.

2. Grafy funkcí dvou proměnných:
   (pokuste se představit si „podobu“ grafu např. pomocí „vrstevnic“ a řezů třeba rovinou $x=0$)

$f(x,y)=-2$; ; $f(x,y)=1-y$; $f(x,y)=2-x-y$;
$f(x,y)=x^2+1$; $f(x,y)=4-y^2$; $f(x,y)=x^2+y^2$; $f(x,y)=x^2+y^2+1$; $f(x,y)=1-(x^2+y^2)$;
$f(x,y)=x^2+4y^2$; $f(x,y)=y^2-x^2$;
$f(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)}$; $f(x,y)=-\sqrt{4-(x^2+y^2)}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;
$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $f(x,y)=\exp(-x^2-y^2)$ (zde $\exp(x)=e^x$).

3. Limita a spojitost:

a) Vyšetřete spojitost funkcí z příkladu 2. v jejich definičních oborech.

b) Je dána funkce $f(x,y)=\log(y-x^2)$. Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru . Zkuste si představit graf funkce f.

c) Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

i) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

ii) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

iii) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

iv) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

4. „Mechanické“ derivování:

Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, následujících funkcí (všude, kde existují) a ukažte, že smíšené derivace 2.řádu jsou záměnné:

i) $f(x,y)=:$ x^2+y ; x^2y; $x\sqrt{y}+\frac{y}{x}$; e^{x^2-y} ; e^{x^2y} ; $e^{-\frac{x}{y}}$; x^y ; $\ln(xy-1)$; $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $arctg\frac{x+y}{x-y}$;

ii) $f(x,y,z)=:$ $xy+yz+xz$; e^{xyz}; $x^{\frac{y}{z}}$; $\arcsin(\frac{z^2}{x^2+y^2})$;

iii) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ je v $R^2-\{(0,0)\}$ řešením rovnice $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

(Laplaceova rovnice).

5. Totální diferenciál a jeho užití:

a) Ukažte, že daná funkce je diferencovatelná v daném bodě (x_0,y_0) (resp. uvnitř definičního oboru), určete její gradient a totální diferenciál v daném bodě (resp. uvnitř definičního oboru), a napište rovnici tečné roviny v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, když:

$f(x,y)=\ln(y-x^2)$, $(x_0,y_0)=(1,2)$; $f(x,y)=\exp(x^2-y)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

$f(x,y)=x^2+4y^2$, $(x_0,y_0)=(1,2)$; $f(x,y)=\frac{x}{y}$, $(x_0,y_0)=(-1,3)$;

$f(x,y)=\ln(xy-1)$, $(x_0,y_0)=(1,2)$.

b) Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně

a) $\log(1{,}99-(1{,}02)^2)$; b) $\sqrt{(1{,}02)^2+(1{,}97)^3}$; c) $\exp((1{,}02)^2-0{,}97)$.

c) Ukažte, že funkce $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ je diferencovatelná v R^3 a najděte její totální diferenciál v bodě $(x_0,y_0,z_0)\in R^3$.

d) Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\frac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

e)* Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$.